CH08 : Arithmétique, PGCD.

I. Diviseur, multiple, divisibilité.

Soient a et b deux nombres entiers.

Définition 1 : On dit que le nombre a est divisible par le nombre b lorsque la division a÷b « tombe pile » (reste 0).
On dit aussi que a est un multiple de b , et « b est un diviseur de a ».

Exemple : 15 est divisible par 3 parce que 15÷3 = 5. On dit aussi que 3 est un diviseur de 15 et que 15 est un multiple de 3.

Définition 2 : Un nombre est dit premier si ses seuls diviseurs sont 1 et lui-même.

Par exemple, les nombres 2, 3, 5, 7, 11, 13 sont premiers.

II. Diviseurs communs, PGCD.

Définition 3 : Si deux nombres a et b sont divisibles par le même entier n non nul, alors le nombre n est un diviseur commun aux nombres a et b.

Exemple : 24 est divisible par :1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24.
16 est divisible par : 1, 2, 4, 8, 16.
Les diviseurs communs à 16 et à 24 sont : 1, 2, 4 et 8.

Définition 4 : Le plus grand parmi les diviseurs communs à deux nombres a et b est appelé « plus grand diviseur commun » de a et b. On note PGCD(a ;b).

Exemple : D'après l'exemple précédent, PGCD(16 ;24)=8.

Définition 5 : On dit que deux nombres sont premiers entre eux lorsque leur PGCD est 1.

Exemple : 24 et 25 sont premiers entre eux.
Attention à ne pas confondre un nombre premier et des nombres premiers entre eux !

III. Nombres rationnels, irrationnels.

Définition 6 : On dit qu'un nombre est rationnel quand il peut s'écrire sous la forme d'une fraction de deux nombres relatifs, et qu'il est irrationnel sinon.

Exemples : $1,5=\frac{15}{10}$ est rationnel, $\frac{-2}{3}$ est rationnel, π est irrationnel.

IV. Application du Pgcd aux fractions irréductibles.

Définition 7 : On dit qu'une fraction est irréductible quand on ne peut plus la simplifier, c'est-à-dire quand son numérateur et son dénominateur sont premiers entre eux.

Propriété 1 : Pour rendre une fraction irréductible, il suffit de diviser son numérateur et son dénominateur par leur PGCD.

Exemple : Rendre la fraction $\frac{4641}{910}$ irréductible.

Le PGCD de 4641 et 910 est 91 ; on divise donc numérateur et dénominateur par 91 :

$$\frac{4641}{910}=\frac{4641\div 91}{910\div 91}=\frac{51}{10}.$$

Et on est sûr que l'on ne peut pas plus simplifier.